2022/06/01, 08 東京名古屋代数セミナー.

超平面配置の特性準多項式

吉永正彦 (大阪大学)

§1. Characteristic polynomials

§2. Free arrangements

§3. Edelman-Reiner, Postnikov-Stanley の予想.

§4. 特性準多項式.

§5. トーラス配置

§6. Ehrhart 準多項式 と GCD 性.

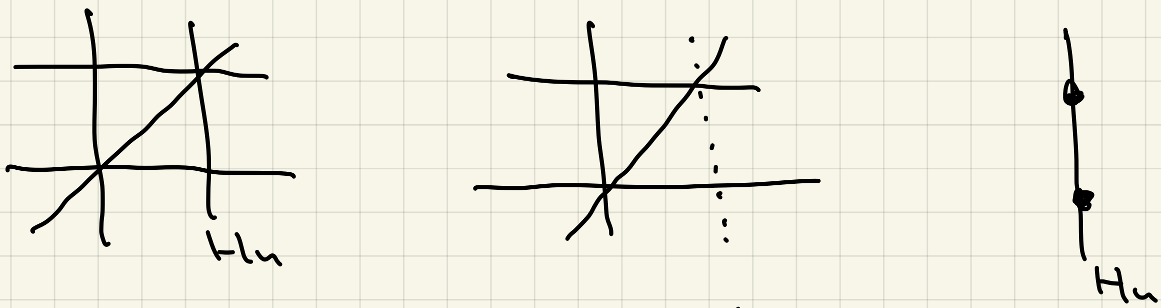
---

§1. 超平面配置の特性多項式

$\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_n\}$: hyp. arr. i.e. $H_i\subseteq V\simeq\mathbb{K}^\ell$ affine hyp.pl.

$\mathcal{A}'=\{H_1\cdots H_{n-1}\}=\mathcal{A}\setminus\{H_n\}$

$\mathcal{A}''=\mathcal{A}'\cap H_n$: arr. on H_n (forgetting multiplicity)



$\mathcal{A}$ $\mathcal{A}'$ $\mathcal{A}''$

t^2-5t+6 t^2-4t+4 $t-2$

Def - Thm 次をみたす $\chi(A,t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在. ②

$$\chi(A,t) = \begin{cases} t^{\dim V} & \text{if } A = \phi \\ \chi(A',t) - \chi(A'',t) & \text{if } A \neq \phi \end{cases}$$

これを A の特性多項式 という

Rem $\chi(A,t)$ "counts" the complement $M(A) := V \setminus \bigcup_{H \in A} H$

$$M(A') = M(A) \sqcup M(A'')$$

$\therefore$

$$M(A) = M(A') - M(A'')$$

Facts (Crapo-Rota, Zaslawski, Orlik-Solomon)

(i) If $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{Poin}(M(A),t) = (-t)^{\ell} \chi(A, -\frac{1}{t})$.

(ii) If $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, # of chambers $= |\chi(A,-1)|$

# of bdd chambers $= |\chi(A,1)|$.

(iii) If $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ $\# M(A) = \chi(A,q)$

(iv) $\chi(A,t)$ は intersection poset

$L(A) = \{ \bigcap_{H \in B} H (\neq \phi) \mid B \subseteq A \}$ から決まる

<u>Example</u> $H_{ij} = \{x_i = x_j\} \subseteq \mathbb{K}^\ell$.

$\mathrm{Br}(\mathbb{K}, \ell) := \{H_{ij} \mid 1 \le i < j \le \ell\}$ "braid arr" or "type $A_{\ell-1}$"

$M_{\mathbb{K}} := \mathbb{K}^\ell \setminus \bigcup H_{ij}$.

- $\mathrm{Poin}(M_{\mathbb{C}}^\ell, t) = (1+t)(1+2t)\cdots(1+(\ell-1)t)$.

- $\# M_{\mathbb{F}_q} = \#\{(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{F}_q^\ell \mid x_i \neq x_j\}$
$= q\cdot(q-1)\cdots(q-\ell+1)$

- $\{\text{Chamber of } \mathrm{Br}(\mathbb{R}, \ell)\} \xleftrightarrow{1:1} \mathfrak{S}_n$
$\{x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(\ell)}\} \longleftarrow\!\!\!\shortmid\ \sigma$

<u>例</u>（彩色多項式） simple graph $G = (V = \{1, \ldots, \ell\}, E)$
に対して、$\mathrm{Br}(\ell)$ の sub arr A_G を
$A_G = \{H_{ij} \mid \{ij\} \in E\}$ で定めると

$\chi(A_G, t)$ は G の chromatic poly.

§2. 自由配置

$\mathcal{A}$: arr. in V として $\mathcal{A}$: central とする. (i.e. $H_i \ni 0$)

$\alpha_i \in V^*$ $\quad H_i = \ker \alpha_i$

$S = S(V^*) = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_\ell]$.

$\mathrm{Der}_S := \bigoplus_{i=1}^{\ell} S \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ polynomial vector fields

Def (log. vector fields)

$$D(\mathcal{A}) := \{ \delta \in \mathrm{Der}_S \mid \delta \alpha_i \in (\alpha_i) \ \forall i = 1 \sim n \}$$

- $(\prod \alpha_i) \cdot \mathrm{Der}_V \subset D(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Der}_S$. $\therefore D(\mathcal{A})$: rank $= \ell$
- $D(\mathcal{A})$ は graded S-module, 反射加群 (K. Saito)

$D(\mathcal{A})$

Ψ

$\theta_E := \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (Euler vector field)

$D_0(\mathcal{A}) := D(\mathcal{A}) / S \cdot \theta_E$.

$(D(\mathcal{A}) \cong D_0(\mathcal{A}) \oplus S \cdot \theta_E)$

$\mathcal{A}$: central より $\chi(\mathcal{A}, 1) = 0$.

$$\chi_0(\mathcal{A}, t) := \frac{\chi(\mathcal{A}, t)}{t-1}$$

Thm (Mustata–Schenck)

$\widetilde{D_0(A)}$ を $D_0(A)$ から定まる $\mathbb{P}^{\ell-1}$ 上の sheaf とする

もし $\widetilde{D_0(A)}$ が locally-free ならその Chern 多項式は

$$c_t(\widetilde{D_0(A)}) = t^{\ell}\chi_0(A, \tfrac{1}{t})$$

となる.

Cor (Terao's factorization Thm)

$D(A)$ が free S-module で S-basis の次数が $d_1, \cdots, d_\ell$ とすると

$$\chi(A, t) = (t-d_1)\cdots(t-d_\ell)$$

(Proof "Mustata–Schenck $\Longrightarrow$ Terao's factorization")

$D_0(A)$: free $\Longrightarrow \widetilde{D_0(A)} = \mathcal{O}(-d_2)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(-d_\ell)$

$(d_1=1)$

$\Rightarrow$ Chern poly: $c_t(\widetilde{D_0(A)}) = \prod(1-d_i t)$

$\overset{MS}{\Longrightarrow}$ $\chi_0(A, t) = \prod_{i=2}^{\ell}(t-d_i)$ //

特性多項式によって代数幾何的アプローチが可能になる.

§. Edelman-Reiner, Postnikov-Stanley conj.

$V = \mathbb{R}^\ell \supset \Phi$: root sys.
$\cup$
Φ^+ : positive system $\ni \tilde{\alpha}$: highest
$\cup$
$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ simple roots.

exponents : $e_1, \cdots, e_\ell$

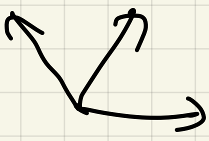
Coxeter # : h

$$H_{\alpha,k} := \{x \in V \mid (\alpha, x) = k\}$$

Def (truncated affine Weyl arr.)
For $a \leq b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$

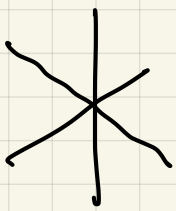
$$A_\Phi^{[a,b]} := \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+,\ k = a, a+1, \cdots, b\}$$

例 $\Phi = A_2$


Φ^+

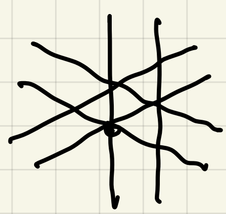
$\chi(\Phi, t) = t^2$

$A_{A_2}^{[0,0]}$



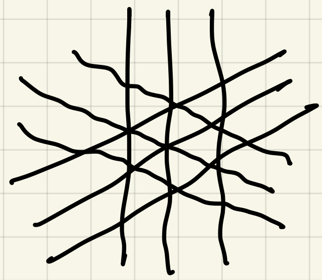
$(t-1)(t-2)$

$A_{A_2}^{[0,1]}$



$(t-3)^2$

$A_{A_2}^{[-1,1]}$



$(t-4)(t-5)$

90年代以降、$A_\Phi^{[a,b]}$の組合せ論的性質(e.g. カタラン数との関係)が Stanley 周辺で研究されている。

Conjecture (Edelman-Reiner 1996)

(weak ver)

① $\chi(\mathcal{A}_{\Phi}^{[-k,k]}, t) = \prod_{i=1}^{\ell} (t - e_i - kh)$

② $\chi(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1-k,k]}, t) = (t - kh)^{\ell}$

(strong ver.)

③ The cone of $\mathcal{A}_{\Phi}^{[-k,k]}$ is free with exponents (= degrees of basis of $D(\mathcal{A})$) $(1, e_1 + kh, e_2 + kh, \cdots, e_\ell + kh)$

④ The cone of $\mathcal{A}_{\Phi}^{[1-k,k]}$ is free with exp. $(1, \underbrace{kh, kh, \cdots, kh}_{\ell\text{コ}})$

Rem Terao's factorization thm より

③ ⇒ ①, ④ ⇒ ② は明らか。

すでに解かれている

1996 ③ for $\Phi = A_\ell$: Edelman-Reiner
1998 ④ for $\Phi = A_\ell$: Athanasiadis
2004 ① for all Φ : Athanasiadis
2002-04 ③④ for all Φ : Terao, Y.

2018 ② for all Φ : Y.
2021 ③ ④ for $\Phi = A_\ell$ by constructing free basis

Suyama, Y.

Conj (Postnikov - Stanley 1997) $m \geq 1$

(i) (h-shift) $\chi(A_{\Phi}^{[1-k, m+k]}, t) = \chi(A_{\Phi}^{[1,m]}, t-kh)$

(ii) ("Funct. eq.") $\chi(A_{\Phi}^{[1,m]}, mh-t) = (-1)^{\ell} \cdot \chi(A_{\Phi}^{[1,m]}, t)$

(iii) ("RH") $\chi(A_{\Phi}^{[1,m]}, t) = 0$ の根は $\mathrm{Re} = \frac{mh}{2}$ をみたす.

Rem "RH" $\Longrightarrow$ "Funct. eq." は明らか.

既に解決済.

1997 (i) ~ (iii) for $\Phi = A_{\ell}$: Postnikov-Stanley

1999 (i) ~ (iii) for $\Phi = ABCD$: Athanasiadis

2018 (i) ~ (ii), (iii) ($m \gg 0$) for all Φ : Y.

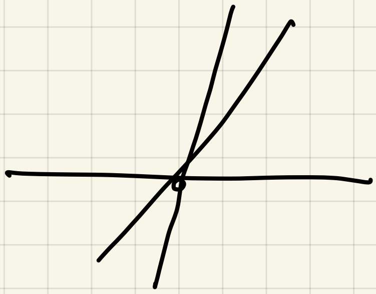
2020 (iii) for $\forall \Phi$. S. Tamura.

§ 特性準多項式

例　$H_1 : y=0$

$H_2 : y=2x$

$H_3 : y=3x$



For $q \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\#\left[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \overline{H_i}\right] = \begin{cases} q^2-3q+2 & q \equiv 1 \text{ or } 5 \bmod 6 \\ q^2-3q+3 & q \equiv 2, 4 \bmod 6 \\ q^2-3q+4 & q \equiv 3 \bmod 6 \\ q^2-3q+5 & q \equiv 6 \bmod 6 \end{cases}$$

$\overline{H_i}$: $H_i \bmod q$

Thm (Kamiya–Takemura–Terao 2007)

なくてもよいが少し要修正 → (central)

$\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を arr in $\mathbb{Z}^\ell$ (central)

このとき $\exists \rho > 0$, $\exists f_1(t), \cdots, f_\rho(t) \in \mathbb{Z}[t]$ s.t.

(1) $$\#\left[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \overline{H_i}\right] = \begin{cases} f_1(q) & \text{if } q \equiv 1 \bmod \rho \\ f_2(q) & \text{if } q \equiv 2 \bmod \rho \\ \vdots & \\ f_\rho(q) & \text{if } q \equiv \rho \bmod \rho \end{cases}$$

$f_1, \cdots, f_\rho$ を constituent という

(2) さらに f_i は次の gcd 性をもつ

$$\gcd(i, \rho) = \gcd(j, \rho) \Longrightarrow f_i = f_j$$

(10)

(3) $f_1 = \chi(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}, t)$.

$\left[\gcd(i, \rho) = 1 \Longrightarrow f_i(t) = \chi(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}, t) \right]$.

この数え上げ関数を特性準多項式といい、

$$\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q) = \#\left[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\ell} \setminus \bigcup H_i \right]$$

と表す。

<u>Def</u> (Ehrhart quasi-poly.)

$P \subset \mathbb{R}^n$：有理多面体とする。

このとき、

$L_P(q) := \#\left[q \cdot P \cap \mathbb{Z}^n \right]$ は quasi-polynomial

すなわち、 $\exists \rho > 0$, $\exists f_1, \cdots, f_\rho \in \mathbb{Q}[t]$ s.t.

$$L_P(q) = \begin{cases} f_1(q) & \text{if } q \equiv 1 \bmod \rho \\ \vdots & \\ f_\rho(q) & \text{if } q \equiv \rho \bmod \rho. \end{cases}$$

前回のまとめ (+α)

Thm (Kamiya–Takemura–Terao)

$\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$: affine arr. in $\mathbb{Z}^\ell$.

$$\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q) := \#\left[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \setminus \bigcup_i \overline{H_i} \right]$$

は quasi-poly. i.e. $= \begin{cases} f_1(q) & q \equiv 1 \mod \rho \\ \vdots & \vdots \\ f_\rho(q) & q \equiv \rho \mod \rho \end{cases}$

$(\exists \rho,\ \exists f_1 \cdots f_\rho \in \mathbb{Z}[t])$

with GCD-property (i.e. $\gcd(i, \rho) = \gcd(j, \rho) \Rightarrow f_i = f_j$)

さらに $f_1(t) = \chi(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}, t)$ は $\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}$ の特性多項式.

今日の予定 (準多項式を通じて初めてみえてくるいくつかの結果

① truncated affine Weyl arr. $\mathcal{A}_\Phi^{[a, b]}$ への応用

② $f_\rho(t)$ と トーラス配置 (j.w. Y. Liu, T.N. Tran)

③ GCD性 と Zonotopality. (j.w. C. de Vries)

① $\mathbb{R}^l \supset \Phi \supset \Phi^+ \supset \Delta = \{\alpha_1 \cdots \alpha_l\}$. W : Weyl gr.

$\Phi^+ \ni \tilde{\alpha}$ highest root.

$$\tilde{\alpha} = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_l\alpha_l.$$

$$\left(\alpha_0 := -\tilde{\alpha},\quad c_0 = 1,\quad \sum_{i=0}^{l} c_i\alpha_i = 0\right)$$

$\varpi_1, \cdots, \varpi_l$: dual basis to $\alpha_1 \cdots \alpha_l$.

$Z(\Phi) := \bigoplus \mathbb{Z}\varpi_i$. (coweight lattice)

$A = \mathcal{A}_\Phi^{[a,b]} = \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+,\ a \le k \le b\}$ を $Z(\Phi)$ の arr. とみなす. $\chi_{quasi}(\mathcal{A}_\Phi^{[a,b]}, q)$ を調べる.

(とくに $[a,b] = [1,m]$)

さて.

$$Z(\Phi) \longrightarrow Z(\Phi)/qZ(\Phi)$$

$\cup$

$q\cdot P^\diamond \cap Z = \sum_i [1,q]\varpi_i \xrightarrow[\text{bij.}]{\cong}$

$\shortparallel$

$\{k_1\varpi_1 + \cdots + k_l\varpi_l \mid 1 \le k_i \le q\}$

$q\cdot P^\diamond$ で格子点を数える.

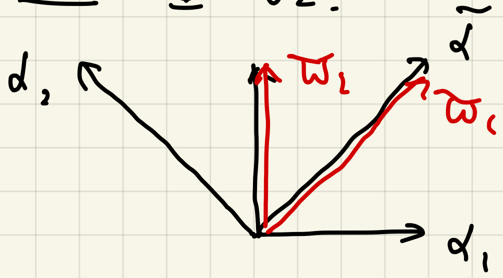
$P^\diamond := \sum (0,1]\cdot\varpi_i$

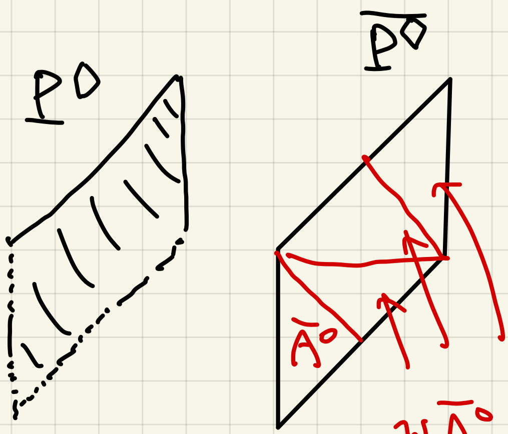
(half open 基本平行四辺形)

$A^\circ := \{\alpha_1 \ge 0, \cdots \alpha_l \ge 0, \tilde{\alpha} \le 1\}$

$$\chi_{quasi}(A, q) = \#\left[q\cdot P^\diamond \cap Z(\Phi) \setminus \bigcup_{\substack{\alpha\in\Phi^+\\ r\in\mathbb{Z}}} H_{\alpha, k+rq}\right]$$

例 $\Phi = B_2$.



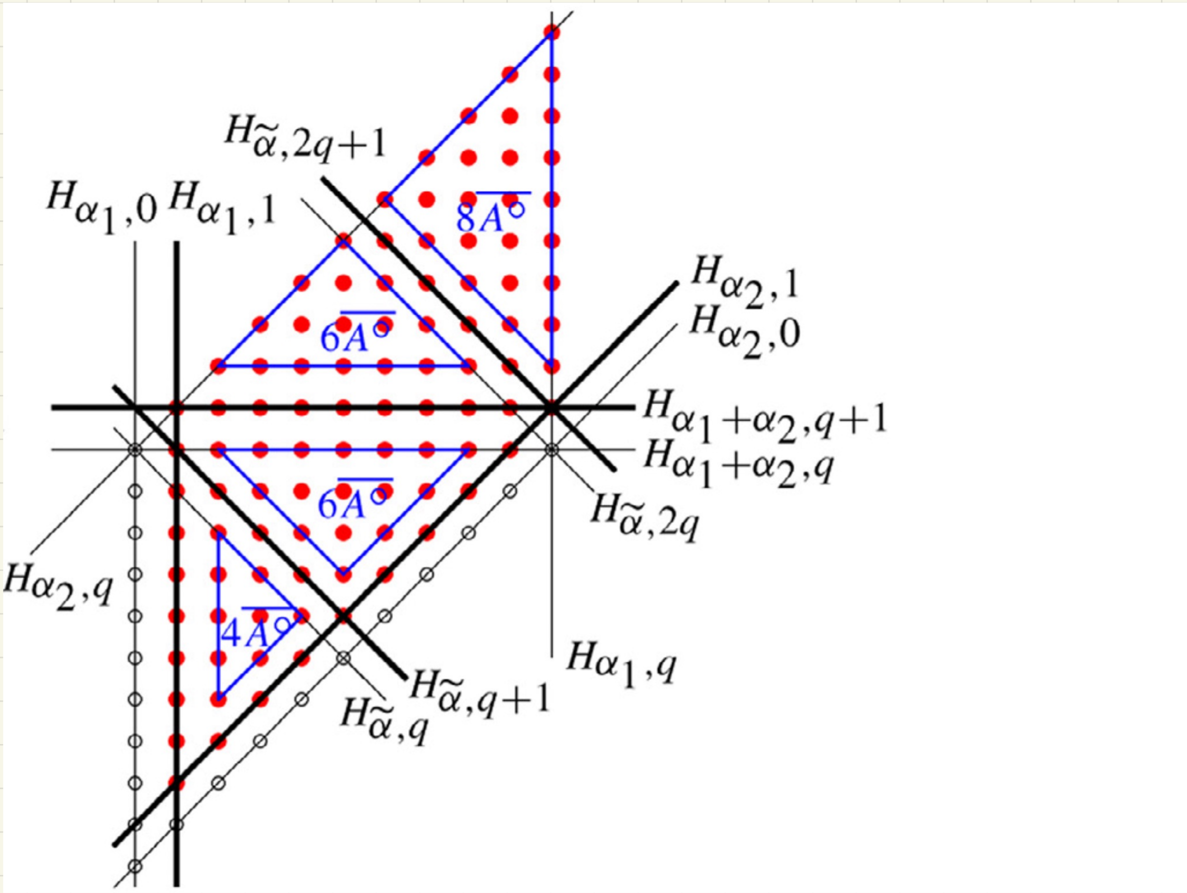


$w\overline{A^\circ}$ の平行いどうでcover.

$P^\diamond := (0,1]\cdot\varpi_1 + (0,1]\varpi_2$

$\overline{P^\diamond} = [0,1]\varpi_1 + [0,1]\varpi_2$

$\underline{A^{[1,1]}_{B_2}}$ $\qquad q\overline{P^\diamond} \cap Z(B_2) \setminus \bigcup_{\substack{i \\ r\in\mathbb{Z}}} H_{\alpha_i, 1+rq}$



alcove $\overline{A^\circ}$ (を $w\in\widetilde{W}$ でうごかしたもの) を色々なサイズに拡大して足したものになる.

$\overline{A^\circ}$ の Ehrhart quasi-poly. を

$L_{\Phi}(q) := |q \cdot \overline{A^\circ} \cap Z(\Phi)|$ とおくと、

$$\chi_{quasi}(A_{\Phi}^{[1,1]}, q) = \sum_i a_i \cdot L(q-i)$$

という形の表示が期待できる。

S: shift operator $(SL)(q) = L(q-1)$

$f(S) = \sum a_i \cdot S^i$ に対して

$$(f(S)L)(q) = \sum a_i L(q-i)$$

としたとき、$f(S)$ を記述することができる。

<u>Def</u> $\mathrm{asc}: W \to \mathbb{Z}$ を次で定める

$$\mathrm{asc}(w) = \sum_{\substack{0 \le i \le \ell \\ w(\alpha_i) > 0}} c_i$$

同様に

$$\mathrm{dsc}(w) = \sum_{\substack{0 \le i \le \ell \\ w(\alpha_i) < 0}} c_i$$

<u>Rem</u> $\mathrm{asc}(w) + \mathrm{dsc}(w) = h$.

<u>Def</u> (Lam - Postnikov 2012 "Eulerian polynomial for Φ")

$$R_{\Phi}(t) := \frac{1}{f} \sum_{w \in W} t^{\mathrm{asc}(w)} = \frac{1}{f} \sum_{w \in W} t^{\mathrm{dsc}(w)}$$

ただし、f: connecting index.

Prop (duality) $R_\Phi\left(\frac{1}{t}\right) \cdot t^h = R_\Phi(t)$. (15)

Thm (Y. 2018)

$$\chi_{quasi}\left(A_\Phi^{[1,m]}, q\right) = R_\Phi(S^{m+1}) \cdot L_\Phi(q)$$

Cor (Thm + duality of R_Φ)

$$\chi\left(A_\Phi^{[1,m]}, mh - t\right) = (-1)^\ell \cdot \chi\left(A_\Phi^{[1,m]}, t\right)$$

(Postnikov–Stanley's conj "Funct. eq.")

これは χ_{quasi} を通ることで初めて見えてきた.

§. トーラス配置

特性多項式 $\chi(A\otimes\mathbb{R}, t)$

例 A: $y=0,\ y=2x,\ y=3x$

$$\chi_{quasi}(A, q) = \begin{cases} q^2-3q+2 & q\equiv 1 \text{ or } 5 \mod 6 \quad f_1, f_5 \\ q^2-3q+3 & q\equiv 2 \text{ or } 4 \mod 6 \quad f_2, f_4 \\ q^2-3q+4 & q\equiv 3 \mod 6 \quad f_3 \\ q^2-3q+5 & q\equiv 6 \mod 6 \quad f_6 \end{cases}$$

f_ρ ?

f_ρ はトーラス化 $\otimes\mathbb{C}^\times$ と関係している

$$A\otimes\mathbb{C}^\times : \{t_2=1,\ t_2=t_1^2,\ t_2=t_1^3\} \text{ in } (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Thm (Y. Liu, T.N. Tran, Y. 2021)

A: (central) arr. in $\mathbb{Z}^\ell$.

$f_\rho(t)$: $\chi_{quasi}(A, q)$ の一番退化した constituent.

$N(A) := (\mathbb{C}^\times)^\ell \setminus \left(\bigcup A\otimes\mathbb{C}^\times\right)$

cf. $\mathrm{Poin}(M(A,t)) = (-t)^\ell \chi(A, -\frac{1}{t})$

このとき

$$\mathrm{Poin}(N(A), t) = (-t)^\ell \cdot f_\rho\left(-\frac{1+t}{t}\right)$$

例 $\ell=1$, $A: \{x_1=0\}$ $\quad \chi_{quasi}(A, q) = q-1 = f_\rho(q)$

$A\otimes\mathbb{C}^\times : \{t_1=1\}$ in $\mathbb{C}^\times$ $\qquad N = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

$$(-t)^1\cdot f_\rho\left(-\frac{1+t}{t}\right) = (-t)\cdot\left(-\frac{1+t}{t}-1\right) = 1+2t$$

<u>Thm</u> (T.N. Tran, Y.)

他の $f_\mathcal{A}$ も、トーラス配置 $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}^\times$ の intersection poset (の subposet) から計算できる。

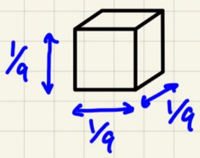
証明は基本的に除細法 + Mayer-Vietoris

(ただし、除細法のためには少し一般化した枠組が必要 (G-Tutte 多項式)).

§. 多面体の対称性と Ehrhart 準多項式 (18)

ルート系の fundamental alcove $\bar{A}^\circ$ の Ehrhart 準多項式は GCD性をもつ. 一般に 有理多面体の Ehrhart 準多項式は GCD性 をもつか?

例1 $P_1=[0,\frac{1}{9}]^3$



一辺 $\frac{1}{9}$ の立方体

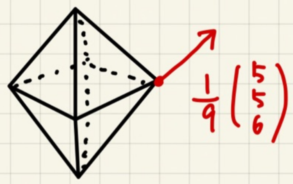
$\rho=9$,

$L_{P_1}(t)=\#(tP_1\cap\mathbb{Z}^3)$

$$=\begin{cases}\left(\frac{t+9}{9}\right)^3 & t\equiv 0 \mod 9\\ \left(\frac{t+8}{9}\right)^3 & t\equiv 1 \mod 9\\ \left(\frac{t+7}{9}\right)^3 & t\equiv 2 \mod 9\\ \left(\frac{t+6}{9}\right)^3 & t\equiv 3 \mod 9\\ \quad\vdots & \\ \left(\frac{t+1}{9}\right)^3 & t\equiv 8 \mod 9\end{cases}$$

$f_0,\cdots,f_8$ がすべて異なる.

例2 $P_2=\mathrm{conv}\{\pm e_1,\pm e_2,\pm e_3\}+\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix}$



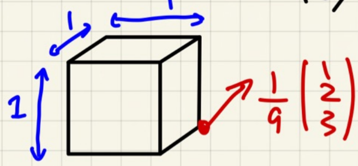
正8面体を平行移動したもの.

$L_{P_2}(t)=\#(t\cdot P_2\cap\mathbb{Z}^3)$

$$=\begin{cases}\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}t & t\equiv 1,8 \mod 9\\ \frac{4}{3}t^3+\frac{2}{3}t & t\equiv 2,7 \mod 9\\ \frac{4}{3}t^3+t^2+\frac{2}{3}t & t\equiv 3,6 \mod 9\\ \frac{4}{3}t^3-\frac{1}{3}t & t\equiv 4,5 \mod 9\\ \frac{4}{3}t^3+2t^2+\frac{8}{3}t+1 & t\equiv 9 \mod 9\end{cases}$$

$f_k=f_{9-k}$ 対称性をもつ.

例3 $P_3=[0,1]^3+\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$



単位立方体を平行移動したもの.

$L_{P_3}(t)=\#(t\cdot P_3\cap\mathbb{Z}^3)$

$$=\begin{cases}t^3, & t\equiv 1,2,4,5,7,8 \mod 9\\ t^3+t^2, & t\equiv 3,6 \mod 9\\ (t+1)^3, & t\equiv 9 \mod 9\end{cases}$$

$\gcd(9,k)$ だけに依って $f_k(t)$ が決まる.

Def quasi poly. $L(q)=\begin{cases}f_1\\ \vdots\\ f_\rho\end{cases}$ が symmetric

$$:\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}\ f_i=f_{\rho-i}.$$

以下 j.w. C. de Vries (2021).

Thm A $P \subseteq \mathbb{R}^d$ を格子多面体とする．このとき次は同値．

(a-1) P は中心対称 (i.e. $\exists v$ s.t. $-P = v + P$)

(a-2) $\forall v \in \mathbb{Q}^d$, $L_{P+v}(t)$ は対称な quasi poly.

Thm B $P \subseteq \mathbb{R}^d$ を格子多面体とする TFAE

(b-1) P は zonotope (i.e. Minkowski sum of segments)

(b-2) $\forall v \in \mathbb{Q}^d$, $L_{P+v}(t)$ は GCD性をもつ．

多面体の性質	準多項式の性質
一般	一般
$\cup$	$\cup$
中心対称	対称性
$\cup$	$\cup$
zonotope	GCD性

Thm C $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 格子多面体，$v \in \mathbb{R}^d$ とすると

$$L_{(P,v)}(t) := \#[(v + tP) \cap \mathbb{Z}^d]$$

は t の多項式．

Cor $v \in \mathbb{Q}^d$ のとき $L_{P+v}(t)$ の k 番目の constituent

は $L_{(P, kv)}(t)$.

証明は、(a-1) $\Rightarrow$ (a-2)、(b-1) $\Rightarrow$ (b-2) は
それほど難しくない。

"$\Longleftarrow$" は次の特徴付けを使う。

<u>Minkowski</u> P: 中心対称 $\Longleftrightarrow$ P の各 facet F に対して、
F と平行で (d-1) 次元
体積が等しい F' がある。

<u>McMullen</u> (d ≥ 4) P: zonotope $\Longleftrightarrow$ すべての codim = 2 face
が中心対称